Stern og Gerlachs Eksperiment

Spin, rumkvantisering og Københavnerfortolkning

Jacob Nielsen[1]

Eksperimentelle resultater, der viser energiens kvantisering forelå, da Bohr opstillede sin “Planetmodel”. Her tænkes på atomernes linjespektre og den fotoelektriske effekt. Bohrs model indebærer kvantisering af elektronens impulsmoment. Herved forudsiges - korrekt - rumkvantisering i den forstand, at en vektoriel/rumlig størrelse og ikke bare en skalar som energien eller virkningsintegralet kan være kvantiseret. Nogle fortolkede dette - ukorrekt - som at elektronernes baner er kvantiseret, det vil sige at elektronen kun kan bevæge sig i visse adskilte ellipsebaner. Heissenberg gjorde senere klart, at den sidstnævnte fortolkning er meningsløs; fordi det er meningsløst, at tale om elektronens bane.

Allerede i 1896 havde den hollandske fysiker Peiter Zeeman (1865-1943) opdaget, at visse spektrallinjer opsplittes i flere linjer under påvirkning af et magnetfelt. Dette fænomen fik navnet Zeeman-effekten og Peiter Zeeman fik nobelprisen for opdagelsen i 1902 - i øvrigt sammen med H.A.Lorentz, der lagde navn til Lorentz-transformationen.

Som vi skal se nedenfor, er der en sammenhæng mellem en ladet partikels impulsmoment og dens reaktion på magnetfelter. I dag forklarer vi Zeeman-effekten med, at elektronerne i et atom, dels besidder et baneimpulsmoment analogt med en planets impulsmoment i banen omkring solen, og dels et rent kvantemekanisk impulsmoment - spinnet.

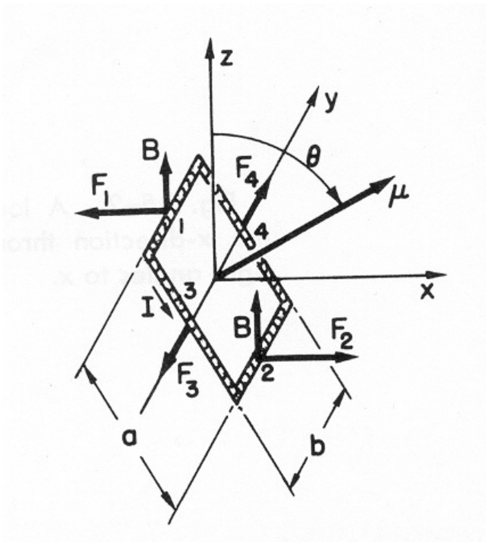
I 1923 sendte Stern og Gerlach sølvioner igennem et inhomogent magnetfelt, og observerede det for en klassisk betragtning overraskende, at ion-strålen blev splittet op i to dele. I 1927 udførte Phipps og Taylor et lignende eksperiment med brint.

Impulsmoment og Magnetisk moment

Jeg minder lige om definitionen på kraftmomentet M og impulsmomentet L:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$
$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} \qquad \textit{ligning 1}$$

*hvor **r** er stedvektoren, **F** - kraften og **p** - impulsen.*



Figuren til højre herfor viser en kvadratisk spole med sidelængderne a hhv. b, der kan dreje om y-aksen. Spolen er anbragt i et homogent magnetfelt med retning langs z-aksen. $\mathbf{F}_1$ - $\mathbf{F}_4$ er kræfterne på de fire sider. Kraften er givet ved:

$$\overrightarrow{F} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{L} \cdot \overrightarrow{e_I} \times \overrightarrow{B} \qquad \textit{ligning 2}[2]$$

hvor e_I er en enhedsvektor i strømmens retning, og L er længden af lederstykket, der er anbragt i magnetfeltet B. Kræfterne ophæver hinanden parvis, så den resulterende kraft på løkken er nul. Imidlertid bevirker kræfterne F_1 og F_2 et drejningsmoment omkring y-aksen. Løkken er en elektromagnet, og her ser vi at **en magnet anbragt i et homogent ydre magnetfelt ikke påvirkes af en kraft men derimod af et moment**.

Som det vil fremgå ved løsning af den første opgave, er det naturligt, at tilordne en magnet et magnetisk

[1] Datadrev\Fysik\Kvantemekanikkens Begrebsmæssige Udvikling\Stern Gerlach 01.wpd

[2] Se for eksempel FG2b ligning 5.3 p.44.

moment **μ** defineret ved:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{\mu} \times \overrightarrow{B}$$

ligning 3

Man kan vise, at det magnetiske moment af en flad løkke er:

$$\overrightarrow{\mu} = \mathbf{I} \cdot \overrightarrow{A}$$

ligning 4

hvor I er strømstyrken i løkken og A er arealet af løkken betragtet som en vektor med længden A og med retning vinkelret på løkken som en "højreskrue" fastlagt ved strømmens retning.

Betragt nu en elektron, der bevæger sig i en cirkelbane med radius R og omløbstid T. Dette svarer til en cirkulær løkke, hvori der løber strømmen e/T. Dette følger af definitionen på strømstyrke, idet den ladning, der passerer et tværsnit af ledningen i løbet af tiden T er e. Elektronen har således et magnetisk moment givet ved:

$$\mu = \mathbf{I} \cdot A = \frac{e}{T} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{e \cdot \omega}{2\pi} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{e \cdot \omega \cdot R^2}{2}$$

ligning 5

elektronen har impulsmomentet:

$$L = R \cdot p = R \cdot m \cdot V = m \cdot R^2 \cdot \omega$$

ligning 6

overalt er krydsprodukter erstattet af produkt mellem længderne, fordi vektorerne står vinkelret på hinanden. Kombineres ligningerne 5 og 6, får vi:

$$\mu = \frac{2e}{m} \cdot L$$

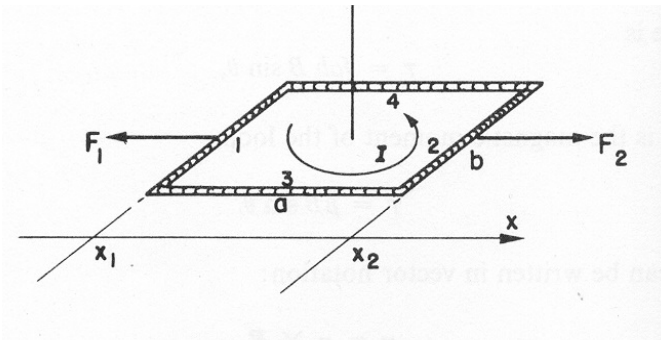
ligning 7

Hvis impulsmomentet er kvantiseret, så vil det magnetiske moment også være det. Eksperimentelt ser vi, at elektroner har et kvantiseret magnetisk moment, selvom bane-impulsmomentet er nul. Det gælder for eksempel elektroner, der bevæger sig langs en ret linje, eller elektronerne i brintatomets grundtilstand, der har baneimpulsmoment nul(s-elektroner har l=0). Det er baggrunden for spinhypotesen, hvor en elektron tilordnes et kvantiseret indre impulsmoment - spinnet. Spinnet er et rent kvantefænomen - uden korrespondens til mekanikken. Grunden til sammenligningen med et impulsmoment er alene, at spinnet afslører sig som et magnetisk moment lige som ladede partikler med impulsmoment. I øvrigt har fotonen spin, selv om den som bekendt er elektrisk neutral - ja den er ikke engang opbygget af mindre ladede partikler, som det er tilfældet med neutronen, hvor man kan forestille sig, at spinnet stammer fra, se tre kvarker, som den er opbygget af.

Problemet med, at Bohrmodellen fejlagtigt tilegner grundtilstanden impulsmomemtet $\hbar$ blev løst med Schrödingers formulering af kvantemekanikken i 1926. Uhlenbech og Goudsmit foreslog i 1925, at man elektronen roterer, men spinnet blev først på elegant vis indbygget i kvantemekanikken af P.A.M Dirac(1902-84) . Schrödinger og Dirac delte nobelprisen i 1933.

Energi af Spole i Magnetfelt

Vi kan knytte en potentiel energi til en spole anbragt i et ydre magnetfelt, forudsat strømstyrken i spolen og spolens orientering i forhold til feltet holdes konstant. Vi kan indse dette ved fra det uendeligt fjerne, at føre en spole ind i feltet. Vi sætter så som vanligt den potentielle energi lig med det arbejde, som en ydre kraft må udføre, for at føre spolen ind i feltet. I situationen vist på figuren kræves en kraft i negativ x-retning og arbejdet bliver negativt. Det skyldes, at vi er på vej ind i feltet, så F_2 er større end F_1. Vi får ved brug af ligning 2[3]:



$$\Delta E_{pot} = A_y = \int_{-\infty}^{x} (F_1 - F_2)\cdot dx = -I\cdot b\cdot \int_{-\infty}^{x} \Delta B\cdot dx = -I\cdot b\cdot \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{dB}{dx}\cdot a\right)\cdot dx =$$

$$-I\cdot b\cdot a\cdot \int_{-\infty}^{x} dB = -I\cdot b\cdot a\cdot B = -\mu\cdot B$$

Man kan vise, at der generelt gælder:

$$\boxed{\Delta E_{pot} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}}$$

ligning 8

Magnetisk Moment i Inhomogent Magnetfelt

Til en potentiel energi hører der en kraft. Hvis vi tænker os spolen anbragt i et inhomogent B-felt, hvis z-komponent varierer, vil løkken være påvirket af en kraft givet ved:

$$\vec{F} = -\frac{dE_{pot}}{dz} = -\frac{d}{dz}\left(-\vec{\mu}\cdot\vec{B_z}\right) = \vec{\mu}\cdot\frac{d\,\vec{B_z}}{dz}$$

ligning 9

Stern-Gerlach magneter er netop konstrueret med henblik på, at frembringe et magnetfelt med stor variation. Partikler med modsat rettet magnetisk moment vi blive påvirket af modsat rettede kræfter. Når vi taler om, at en elektron har spin: OP, mener vi at elektronens indre magnetiske moment er langs den betragtede akse.

[3] Ved andet lighedstegn benyttes, at den ydre kraft skal være lige så stor men modsat rettet den magnetiske kraft. Ved fjerde lighedstegn tilnærmes ændringen i magnetfeltet med det approximerende førstegrads polynomium.

Stern-Gerlach i følge QM.

Det vil føre for vidt her, at give en kvantemekanisk behandling af Stern-Gerlach problemet, men lad os se på resultatet af en sådan analyse. Betragt en partikel, der er i en egentilstand - spin-OP med hensyn til en given retning. Det vil sige, at en måling af spinnet i denne retning med sandsynlighed en, vil give resultatet spin-OP. Med spin-OP menes, at spinnet er rettet i samme retning som den betragtede akse. Hvis spinnet nu måles med hensyn til en retning, der danner vinklen θ med den første retning; så vil sandsynligheden for resultatet spin-OP henholdsvis spin-NED være:

$$\boxed{\begin{aligned} P(\uparrow,\vartheta) &= \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ P(\downarrow,\vartheta) &= \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{aligned}}$$

For eksempel gælder der :

$$P(\uparrow,90^0) = P(\downarrow,90^0) = ½$$

hvis spintilstanden er kendt i en retning, er spinnet i retningen vinkelret på fuldstændigt ubestemt. De to fysiske størrelser er komplementære ligesom impuls og position.

I fodnoterne gives lidt hjælp til opgaverne. Brug kun hjælpen, når det er nødvendigt.

1. Moment på spole i homogent magnetfelt

a)
Kontroller kræfternes retning på figuren på første side.
b)
Opskriv udtrykket for momentet på den kvadratiske spole - dels ved hjælp af ligning 2 & 3 og dels ved hjælp af ligning 3 & 4.
c)
Betragt de to situationer, hvor det magnetiske moment og magnetfeltet er parallelle. Vi tænker os nu, at spolen drejes lidt. Hvornår vil kraft-momentet dreje spolen tilbage mod xy-planen, og hvornår vil det få den til at vende rundt?
d)
Søger spolen som ventet mod et minimum for den potentielle energi?

2. Tangensboussolen og magnetiske kræfter og energi

a)
Beregn den inderste spoles energi i magnetfeltet fra den midterste spole, når strømstyrken i begge spoler er 1,5 A. Udfør beregningen både for ensrettede og modsat rettede strømme. Vi antager at feltet overalt er det samme som i centrum af spolen.
b)
Brug formlen 7.10 p.67 i FG2B, og beregn kraften på den inderste spole[4].

3. Dobbelt Stern-Gerlach eksperiment

En stråle af partikler sendes gennem en SG-magnet - SG1. Strålen med spin-NED blokkeres, og vi sender strålen med spin-OP videre til en ny SG-magnet - SG2 **med samme orientering**. Ved første øjekast det mest uinteressante forsøg, man kan tænke sig, men nu er det jo kvantemekanik!

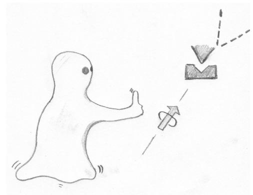
a)
Hvad er sandsynligheden for måleresultatet spin-OP henholdsvis spin-NED ved målingen SG2[5] ?

Efter passage af SG1 tænker vi os nu partiklerne i strålen delt op i to grupper:

I: De partikler, der ville have spin-OP, hvis spinnet blev målt i retningen 45^0.

II: De partikler, der ville have spin-NED, hvis spinnet blev målt i retningen 45^0.

b)
Beregn sandsynligheden for ↑ hhv. ↓ ved måling på partiklerne fra gruppe I i magneten SG2[6].
Samme for partiklerne i gruppe II.
c)
Hvad bliver den samlede sandsynlighed for ↑ hhv. ↓ ved måling i SG2.
d)
Sammenlign resultaterne fra a) og c). Hvad ville Bohr og Heissenberg sige? Hvad ville Einstein mon sige?



[4] Differentier udtrykket for feltstyrken med hensyn til x.

[5] Sæt $\theta = 0$.

[6] Sæt $\theta = -45$ grader. Og for gruppe II 135 grader.